

Aula 8: A Fórmula de Black-Scholes

É possível resolver analiticamente a equação de Black-Scholes sob determinadas condições. Começemos pelo caso das opções europeias do tipo *call*, para o qual a equação é re-escrita com a notação $C(t, S) = V(t, S)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) - rC(t, S) = 0, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad S > 0.$$

A condição final é dada por

$$C(T, S) = \max\{S - E, 0\}$$

e as condições de fronteira para $S \rightarrow 0^+$ e $S \rightarrow +\infty$ tomam a forma

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} S - C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0.$$

Este problema inclui quatro parâmetros dimensionais (σ^2 , r , T e E).

Equação com Coeficientes Constantes

O primeiro passo é tornar constantes os coeficientes desta equação, que dependem da variável independente S . Para este efeito, faça-se

$$t = T - \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\tau, \quad S = Ee^x \quad \text{e} \quad C(t, S) = Ev(\tau, x).$$

O resultado é a equação diferencial

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau, x) + (c - 1)\frac{\partial v}{\partial x}(\tau, x) - cv(\tau, x),$$

em que $c = 2r/\sigma^2$ é já um parâmetro adimensional. A condição final ($t = T$) passa a ser uma condição inicial ($\tau = 0$), da forma

$$v(0, x) = \max\{e^x - 1, 0\}.$$

As condições de fronteira (quando $S \rightarrow 0^+$) e $S \rightarrow +\infty$) são equivalentes às novas condições de fronteira (quando $x \rightarrow \pm\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(\tau, x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - v(\tau, x) = e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau}, \quad \tau \geq 0.$$

Equação de Difusão

Ao converter a equação de Black-Scholes (com os coeficientes já constantes) na forma canônica, obtém-se uma equação de difusão. Para alcançar este objectivo, faz-se uma nova mudança de variáveis (mas desta vez apenas na variável dependente):

$$v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x).$$

Os parâmetros reais α e β são escolhidos de forma a anular determinados termos. A equação em $u(\tau, x)$ passa a ser, omitindo a dependência das funções em relação às variáveis independentes τ e x ,

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (c-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - c u.$$

O termo envolvendo a derivada parcial $\partial u / \partial x(\tau, x)$ anula-se se escolhermos α e β a satisfazer

$$0 = 2\alpha + c - 1.$$

O termo em $u(\tau, x)$ desaparece se

$$\beta = \alpha^2 + (c-1)\alpha - c.$$

Estas duas equações têm a solução única

$$\alpha = -\frac{1}{2}(c-1) \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{1}{4}(c+1)^2.$$

Assim sendo, a mudança de variável dependente

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2 \tau} u(\tau, x)$$

permite escrever a equação de Black-Scholes na forma difusiva

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x), \quad \tau \geq 0 \quad \text{e} \quad -\infty < x < +\infty.$$

A condição inicial fica na forma

$$u(0, x) = \max \left\{ e^{\frac{1}{2}(c+1)x} - e^{\frac{1}{2}(c-1)x}, 0 \right\}.$$

As condições de fronteira passam a ser

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2 \tau} u(\tau, x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2 \tau} u(\tau, x) = e^{-\frac{2x}{\sigma^2} \tau},$$

para $\tau \geq 0$.

Verifica-se, facilmente, que a equação de difusão está escrita na forma canónica e que o seu discriminante é nulo, o que mostra que se trata de uma equação parabólica. É por este facto que a equação de Black-Scholes é, também, parabólica.

Qualquer problema de valor inicial da forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x), \quad \tau \geq 0 \quad \text{e} \quad -\infty < x < +\infty, \\ u(0, x) &= u_0(x)\end{aligned}$$

tem solução única desde que $u_0(x)$ seja uma função *bem comportada* (por exemplo, contínua excepto num número finito de pontos) e desde que $u_0(x)$ não cresça muito rapidamente quando $|x| \rightarrow +\infty$, ou seja, desde que exista uma constante $a > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x)e^{-ax^2} = 0.$$

Se assim for, a solução $u(\tau, x)$ varia continuamente com $u_0(x)$. A fórmula analítica para a solução é dada pelo integral de Poisson

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s)e^{-\frac{1}{4\tau}(x-s)^2} ds.$$

Estamos preparados para resolver o problema de valor inicial proveniente da equação de Black-Scholes. Em primeiro lugar, observamos que

$$u_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ e^{\frac{1}{2}(c+1)x} - e^{\frac{1}{2}(c-1)x}, 0 \right\} = \max \left\{ e^{\frac{1}{2}(c-1)x}(e^x - 1), 0 \right\}.$$

é uma função *bem comportada*, por ser C^∞ em toda a recta real à excepção de um ponto. É fácil verificar (e fica relegado para um exercício) que $u_0(x)$ não cresce muito rapidamente quando $|x| \rightarrow +\infty$, no sentido exposto em cima.

Precisamos de calcular a expressão do integral de Poisson para esta função $u_0(x)$. Para o efeito, começamos por notar que, atendendo à expressão para $u_0(x)$,

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(c+1)s} - e^{\frac{1}{2}(c-1)s} \right) e^{-\frac{1}{4\tau}(x-s)^2} ds.$$

Para escrever este integral de forma mais resumida efectua-se a mudança de variável $y = (s - x)/\sqrt{2\tau} \iff s = x + \sqrt{2\tau}y$, o que resulta em

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c+1)(x+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c-1)(x+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Calculemos o primeiro integral, completando o quadrado,

$$\begin{aligned}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c+1)(x+\sqrt{2\tau}y)-\frac{1}{2}y^2} dy &= e^{\frac{1}{2}(c+1)x} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau})^2} dy \\ &= e^{\frac{1}{2}(c+1)x+\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \int_{-x/\sqrt{2\tau}-\frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.\end{aligned}$$

O segundo integral seria calculado de forma semelhante. Logo, se recorrermos à função de distribuição (cumulativa) de uma lei de probabilidade normal de média 0 e desvio padrão 1, dada por

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds,$$

podemos escrever que

$$u(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(c-1)x + \frac{1}{4}(c-1)^2\tau} N(d_2)$$

com

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau}.$$

Agora, há que fazer as mudanças de variáveis em sentido inverso para determinar a solução da equação de Black-Scholes nas variáveis originais. Em primeiro lugar, escreve-se a solução como

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} u(\tau, x) = e^x N(d_1) - e^{-\frac{2x}{\sigma^2}\tau} N(d_2).$$

Depois, multiplica-se ambos os membros desta igualdade por E e escreve-se a solução nas variáveis originais $C(t, S)$, t e S

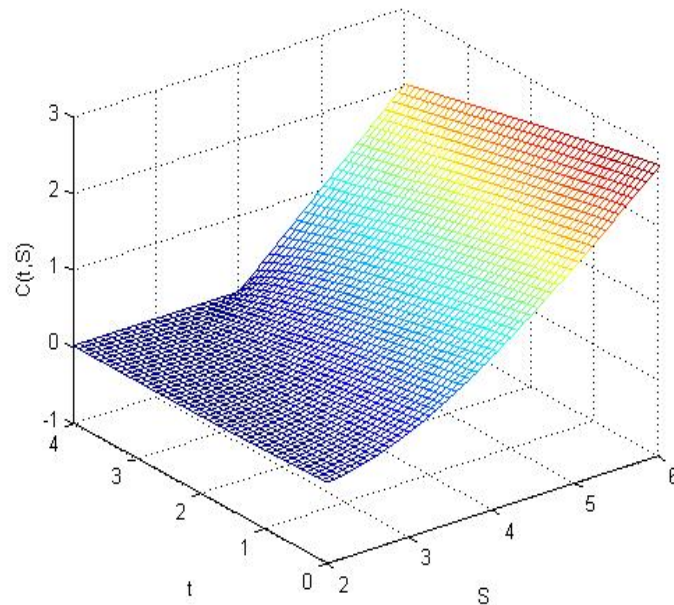
$$C(t, S) = SN(d_1) - e^{-r(T-t)} EN(d_2),$$

em que

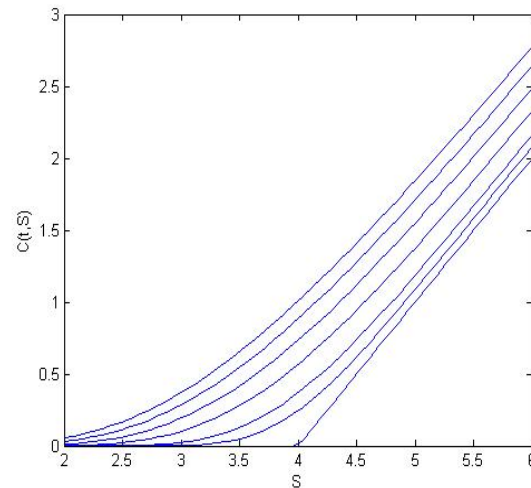
$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

com $S > 0$ e $t \in [0, T)$. Quando $t = T$, a fórmula é dada por $C(T, S) = \max\{S - E, 0\}$. Obtivemos, assim, a expressão analítica da equação de Black-Scholes, conhecida por fórmula de Black-Scholes, para o preço de opções europeias *call*.

A figura seguinte mostra o gráfico de $C(t, S)$ quando $E = 4$, $r = 0.05$ e $\sigma = 0.2$, para valores de t compreendidos entre $t_0 = 0$ e $T = 4$ e valores de S a variar entre $S_{t_0} = 2$ e $S_T = 6$.



De seguida reproduzem-se os gráficos de $C(t, S)$ para vários valores de t a aproximarem-se da maturidade.



Exercícios

1. Prove que o problema de valor inicial definido pela equação de difusão (com a condição inicial proveniente da equação de Black-Scholes) satisfaz as condições exigidas para que a solução $u(\tau, x)$ seja única e varie continuamente com $u_0(x)$.

2. Mostre que a fórmula de Black-Scholes satisfaz, no limite, a condição final $C(T, S) = \max\{S - E, 0\}$, para todo o $S > 0$, e as condições de fronteira

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} S - C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}$$

para todo o $t \in [0, T)$.

3. Deduza a fórmula de Black-Scholes para o preço de opções europeias *put*.